Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Институт фундаментального образования

Н. А. ЗВЕЗДИНА
Н. Б. ПУШКАРЕВА
Г. В. САКУН

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Учебно-методическое пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве **учебно-методического пособия**
для выполнения индивидуальных домашних заданий
по физике для студентов всех форм обучения
всех специальностей

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 539.1:536(075.8)
ББК 22.36+22.317
З-43

Рецензенты:

завкафедрой технологии и экономики Института физики, технологии и экономики УрГПУ, д-р физ.-мат. наук, проф. **О. А. Чикова**;
д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры общей физики РГППУ **А. Д. Ивлиев**

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук **А. А. Повзнер**

Звездина, Н. А.
З-43 Молекулярная физика. Термодинамика : учебно-методическое пособие по выполнению индивидуальных домашних заданий по физике / Н. А. Звездина, Н. Б. Пушкарева, Г. В. Сакун. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 42, [2] с.

ISBN 978-5-7996-1394-5

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей при выполнении ИДЗ по физике по разделам «Молекулярная физика и термодинамика». Приведен список основных понятий и формул, используемых в данном разделе, а также разобраны примеры решения типовых задач в соответствии со структурой ИДЗ.

УДК 539.1:536(075.8)
ББК 22.36+22.317

Подготовлено кафедрой физики.

ISBN 978-5-7996-1394-5

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения всех специальностей при выполнении ИДЗ по физике по разделам «Молекулярная физика и термодинамика».

Индивидуальное домашнее задание содержит 10 заданий по следующим темам: основы молекулярно-кинетической теории; функции распределения Максвелла и Больцмана; уравнение Менделеева — Клапейрона; изопроцессы в идеальном газе и их графики; число степеней свободы молекул; молярная и удельная теплоемкости идеальных газов; первое начало термодинамики и его применение к изопроцессам; адиабатный процесс; тепловые машины и цикл Карно; второе начало термодинамики и расчет изменения энтропии.

В каждой теме приведен список основных понятий и формул, используемых в данном разделе, а также разобраны решения типовых задач с пояснениями и указанием используемых законов в соответствии со структурой ИДЗ и даны образцы оформления подобных типовых задач.

Задание 1.
Основы молекулярно-кинетической теории

Основные понятия и формулы

— Количество вещества ν измеряется в молях. Моль любого вещества содержит столько же структурных единиц, сколько содержится атомов в 12 г углерода C^{12}. Число атомов или молекул в одном моле вещества — это число Авогадро, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

— Количество молекул N вещества, содержащихся в массе m, равно

$$N = \frac{m}{M} N_A = \nu N_A .$$

— Концентрация молекул n равна количеству молекул в единице объема

$$n = \frac{N}{V}.$$

— Средняя квадратичная скорость молекул

$$V_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} ,$$

где $m_0 = M/N_A$ — масса одной молекулы; $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. В сосуде находится углекислый газ массой $m = 10$ г при температуре $t = 27$ °С и давлении $P = 150$ кПа. Найти: 1) чему равна плотность газа при этих условиях? 2) какова средняя квадратичная скорость молекул газа в этом случае?

Дано:
$m = 10$ г $= 1 \cdot 10^{-2}$ кг
$T = 300$ К
$P = 150$ кПа $= 1{,}5 \cdot 10^5$ Па

$$M_{CO_2} = 44 \cdot 10^{-3} \, \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

Определить: 1) ρ —? 2) $\langle V_{\text{кв}} \rangle$ –?

Решение:

1. При описании поведения идеального газа удобно использовать уравнение Менделеева — Клапейрона, которое связывает между собой термодинамические параметры состояния газовой системы. Оно имеет вид

$$PV = \frac{m}{M} RT \, .$$

По определению, плотность газа $\rho = \dfrac{m}{V}$.

Подставив в это выражение плотности газа отношение $\dfrac{m}{V}$ из уравнения Менделеева — Клапейрона, получим

$$\rho = \frac{PM}{RT}.$$

По условию задачи нам известны все величины. Вычислим плотность газа при заданных условиях:

$$\rho = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 44 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300} = \frac{1{,}5 \cdot 44}{8{,}31 \cdot 3} = 2{,}65 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \, .$$

2. Далее вычислим среднюю квадратичную скорость молекул:

$$V_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \text{, или } V_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3}}} = 412 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: 1) $\rho = 2{,}65$ кг/м^3, 2) $\langle V_{\text{кв}} \rangle = 412$ м/с.

ЗАДАЧА 2. Найти: 1) массу m_0 молекулы углекислого газа CO_2; 2) число молекул в m = 100 г газа; 3) концентрацию молекул газа n при плотности газа $\rho = 1{,}98$ кг/м^3.

Дано:
$m = 100$ г $= 0{,}1$ кг
$\rho = 1{,}98$ кг/м^3
$M = 0{,}044$ кг/моль

Определить:1) m_0 = ? 2) N = ? 3) n = ?

Решение:

1) По определению, в одном моле любого вещества содержится одинаковое число молекул, равное $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Масса одной молекулы определяется следующим образом: $m_0 = \dfrac{m}{N_A}$.

Вычислим массу одной молекулы углекислого газа:

$$m_0 = \frac{m}{N_A} = \frac{0{,}10}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 1{,}66 \cdot 10^{-25}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

2) Для определения количества молекул в заданной массе газа необходимо определить число молей газа, а для этого нужно знать молярную массу рассматриваемого газа. Молярную массу любого вещества можно определить, зная химическую формулу молекулы. В нашем случае рассматривается углекислый газ — CO_2. Отсюда вытекает, что $M = (12 + 2 \cdot 16) \cdot 10^{-3}$ кг/моль $= 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Определим число молей углекислого газа CO_2 в заданной массе газа:

$$\nu = \frac{m}{M_{CO_2}} = \frac{0{,}10}{44 \cdot 10^{-3}} = 2{,}27 \text{ моль}.$$

Умножив число молей на число молекул в одном моле вещества, получим число молекул, содержащихся в 100 г углекислого газа:

$$N = \nu \cdot N_A = 2{,}27 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}37 \cdot 10^{24} \text{ молекул}.$$

3) Концентрация молекул равна количеству молекул, содержащихся в единице объема: $n = \dfrac{N}{V}$. Здесь неизвестный объем газа определим по заданной плотности. По определению, плотность равна $\rho = \dfrac{m}{V}$, и тогда из этого уравнения можно выразить объем $V = \dfrac{m}{\rho}$. Итоговая формула для определения концентрации $n = \dfrac{N\rho}{m}$.

После подстановки получаем:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{N\rho}{m}=\frac{1{,}37\cdot10^{24}\cdot1{,}98}{0{,}10}=2{,}71\cdot10^{25}\,\frac{1}{\text{м}^3}.$$

Ответы:

1) $m_0=7{,}3\cdot10^{-26}$ кг; 2) $N=1{,}4\cdot10^{24}$ молекул; 3) $n=2{,}8\cdot10^{25}\,\frac{1}{\text{м}^3}$.

ЗАДАЧА 3. В комнате объемом $V = 60$ м^3 испарили капельку духов, содержащую $m = 10^{-4}$ г ароматического вещества с молярной массой $M = 0{,}050$ кг/моль. Сколько молекул N_0 этого вещества попадает в легкие человека при каждом вдохе? Объем легких принять равным $V_0 = 2{,}2$ л.

Дано:
$V = 60$ м^3
$M = 10^{-4}$ г $= 10^{-7}$ кг
$M = 0{,}050$ кг/моль
$V_0 = 2{,}2$ л $= 2{,}2\cdot10^{-3}$ м^3.

Определить: $N_0 = ?$

Решение:

Вследствие хаотического теплового движения молекул через некоторое время после того, как в комнате испарили капельку духов, их концентрация, т. е. число молекул в единице объема, станет одинаковой во всей комнате: $n=\frac{N}{V}$. По условию, известными являются масса m и молярная масса духов M. Используя эти данные, найдем количество вещества ν, которое испарилось и находится в комнате, и число молекул духов N:

$$\nu=\frac{m}{M}\qquad N=nV.$$

С учетом этого концентрация молекул равна

$$n=\frac{N}{V}=\frac{\nu N_A}{V}=\frac{m}{M}\cdot\frac{N_A}{V}.$$

При каждом вдохе в легкие человека попадает N_0 молекул:

$$N_0=\frac{m}{M}\cdot\frac{N_A}{V}V_0.$$

Подставим численные значения:

$$N_0 = \frac{m}{M} \cdot \frac{N_A}{V} V_0 = \frac{10^{-7} 6{,}02 \cdot 10^{23}}{0{,}05 \cdot 60} 2{,}2 \cdot 10^{-3} = 4{,}4 \cdot 10^{13} \text{ молекул.}$$

Ответ: $N_0 = 4{,}4 \cdot 10^{13}$ молекул.

Задания 2 и 3. Функции распределения Максвелла и Больцмана

Основные понятия и формулы

— Функция распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла) $f(\nu) = \dfrac{dN}{Nd\nu}$ — показывает долю молекул, скорости которых заключены в интервале от ν до $\nu + d\nu$, в расчете на единицу этого интервала.

— Распределение Максвелла (распределение молекул по модулю скорости) выражается двумя соотношениями:

а) число молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от ν до $\nu + d\nu$,

$$dN(\nu) = Nf(\nu)d\nu = N4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kN}\right)^{\frac{3}{2}} \nu^2 e^{-\frac{m_0 \nu^2}{2kT}} d\nu,$$

где N — общее число молекул; m_0 — масса одной молекулы.

б) число молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от u до $u + du$:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Nu^2 e^{-u^2} du,$$

где $u = \dfrac{\nu}{\nu_в}$ — относительная скорость молекул, равная отношению скорости ν к наиболее вероятной скорости $\nu_в$;

$f(u)$ — функция распределения по относительным скоростям.

— В случае малого интервала скоростей (т. е. $\Delta u << u$) справедливо выражение

$$\Delta N = Nf(u)\Delta u,$$

которое определяет число молекул ΔN, относительные скорости которых лежат в интервале от u до $u+\Delta u$.

— Распределение частиц в силовом поле (распределение Больцмана):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right),$$

где n — концентрация частиц; $W_р$ — их потенциальная энергия; n_0 — концентрация частиц в точках поля, где $W_p = 0$; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

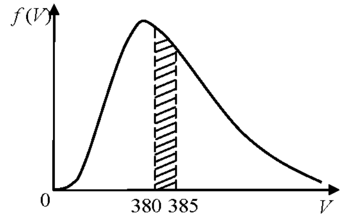
· Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести):

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right),$$

где P — давление газа на высоте h по отношению к уровню, принятому за нулевой; M — молярная масса газа; h — высота точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; P_0 — давление газа на нулевом уровне; g — ускорение свободного падения; R — молярная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. На рисунке представлен график функции распределения молекул кислорода по скоростям (распределение Максвелла) для температуры $T = 273$ К. Функция достигает максимума при скорости $V = 380$ м/с. Здесь:



1) отлична от нуля вероятность того, что молекула кислорода при $T = 273$ К имеет скорость, равную 380 м/с;
2) площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями

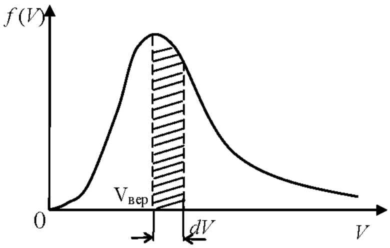
в интервале от 380 м/с до 385 м/с, или вероятность того, что скорость молекулы имеет значение в этом интервале скоростей;

3) с понижением температуры площадь под кривой уменьшается;

4) при изменении температуры положение максимума изменяется.

Укажите не менее двух верных вариантов ответов.

Решение:



1) Первое утверждение является неверным, т. к. если точно задана скорость, то $d\nu = 0$, следовательно, вероятность $dP = 0$.

2) Второе утверждение является верным, т. к. оно вытекает из определения функции распределения. Функция распределения Максвелла $f(\nu)$ имеет смысл плотности вероятности $f(\nu)=\frac{dP}{d\nu}=\frac{dN}{Nd\nu}$, где $\frac{dN}{N}$ — доля молекул, скорости которых заключены в интервале от ν до $\nu+d\nu$. В нашем случае интервал скоростей $d\nu = 5$ м/с вблизи $\nu_{вер} = 380$ м/с — наиболее вероятной скорости молекул, близкой к которой движется большее число молекул. dN — число молекул, скорости которых заключены в интервале от 380 м/с до 385 м/с; N — число всех молекул газа. Площадь заштрихованной полоски $S_{штрих} = \int\limits_{\nu}^{\nu+d\nu} f(\nu)d\nu = dP = \frac{dN}{N}$ определяет долю молекул, скорости которых заключены в интервале от 380 м/с до 385 м/с.

3) Третье утверждение является неверным, поскольку вероятность того, что величина скорости может принять хотя бы какое-нибудь значение в интервале от нуля до бесконечности (достоверное событие), равна единице $\int\limits_0^\infty f(\nu)d\nu = 1$, и поэтому при изменении температуры площадь под кривой остается равной единице. Площадь под графиком всегда равна 1, поскольку вероятность того, что скорость молекулы попадает в интервал от 0 до ∞ всегда равна 1 и не зависит от температуры.

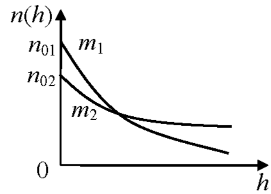
4) Четвертое утверждение является верным, поскольку положение максимума функции распределения соответствует наиболее вероятной скорости, а она зависит от температуры следующим образом:

$$V_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\,.$$

Следовательно, положение максимума функции распределения изменяется с изменением температуры, например, с ростом температуры $V_{\text{вер}}$ возрастет.

Варианты правильного ответа: 2 и 4

ЗАДАЧА 2. На рисунке приведены графики функций распределения молекул идеального газа n во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты h для двух разных газов, где m_1 и m_2 — массы молекул газа (распределение Больцмана).



Для этих графиков верными являются утверждения, что ...

1) масса молекулы m_1 больше массы m_2;
2) концентрация молекул газа с меньшей массой на «нулевом уровне» ($h = 0$) меньше;
3) масса молекулы m_1 меньше массы m_2;
4) концентрация молекул газа с меньшей массой на «нулевом уровне» ($h = 0$) больше.

Решение:

Зависимость концентрации молекул идеального газа от высоты h для некоторой температуры T определяется распределением Больцмана:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right),$$

где n_0 — концентрация молекул на высоте $h = 0$; m_0 — масса молекулы; g — ускорение свободного падения; k — постоянная Больцмана.

Из формулы следует, что при постоянной температуре концентрация газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул W_p, и уменьшается с высотой по экспоненциальному закону.

1) При одной и той же температуре молекулы, имеющие меньшую массу, более равномерно распределяются по высоте, и поэтому можно сделать вывод, что масса m_1 больше m_2. Таким образом, первое утверждение верное.

2) При одной и той же температуре молекулы, имеющие меньшую массу, более равномерно распределяются по высоте, и поэтому концентрация молекул газа, имеющих меньшую массу на «нулевом уровне» ($h = 0$), меньше, чем для молекул газа, имеющих большую массу. Таким образом, второе утверждение является верным.

Варианты правильных ответов: 1, 2.

ЗАДАЧА 3. На какой высоте над поверхностью Земли атмосферное давление составляет 75% от давления на уровне моря? Температуру считать неизменной и равной $t = 0$ °C. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Молярная масса воздуха $M = 0{,}029$ кг/моль.

Дано:
$P = 0{,}75\ P_0$
$t = 0$ °C, или $T = 273$ K
$M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$g = 9{,}8$ м/с^2.

Определить: $h = ?$

Решение:

Атмосферу по условию считаем изотермической, т. е. температура воздуха не изменяется с высотой и ускорение свободного падения g также не зависит от высоты.

Используем барометрическую формулу для нахождения h:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{P}{P_0} = \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

Прологарифмируем полученное равенство и выразим h:

$$\frac{Mgh}{RT} = \ln\frac{P_0}{P};\ \text{откуда}\ h = \frac{RT}{Mg}\ln\left(\frac{P_0}{P}\right).$$

Подставим численные значения и выразим искомую величину h:

$$h=\frac{8{,}31\cdot 273}{0{,}029\cdot 9{,}8}\cdot \ln\frac{P_0}{0{,}75P_0}.$$

Рассчитаем искомую величину:

$$h=\frac{8{,}31\cdot 273\cdot \ln\dfrac{1}{0{,}75}}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}=\frac{8{,}31\cdot 273\cdot 0{,}28}{29\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}=2{,}3\cdot 10^3\,\text{м}.$$

Ответ: $h = 2{,}3\cdot 10^3$ м.

ЗАДАЧА 4. Какая часть молекул водорода $\frac{\Delta N}{N}$, находящегося при температуре $T = 400$ К, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более чем на 5 м/с?

Дано:
$T = 400$ К
$\Delta v = \pm 5$ м/с

Найти: $\frac{\Delta N}{N} = ?$

Решение:

Распределение молекул по относительным скоростям в случае малого интервала скоростей (т. е. $\Delta u \ll u$) выражается уравнением

$$\Delta N = Nf(u)\Delta u = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 e^{-u^2}\Delta u.$$

Отсюда найдем ту часть молекул, относительные скорости которых лежат в интервале Δu:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}\Delta u,$$

где $u = \frac{v}{v_в}$ — относительная скорость, равная отношению скорости v к наиболее вероятной скорости $v_в$.

Прежде чем производить расчеты по указанной формуле, необходимо убедиться, что выполняется условие малости интервала.

Вычислим наиболее вероятную скорость молекул водорода при заданной температуре:

$$\nu_в = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 400}{0{,}002}} = 1{,}82 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Поскольку в задаче идет речь о наиболее вероятной скорости, надо считать $\nu = \nu_в$, следовательно, $u = \frac{\nu}{\nu_в} = 1$, тогда $\Delta u = \frac{\Delta\nu}{\nu_в} = \frac{5}{1{,}82 \cdot 10^3} \ll 1$. Полученное соотношение говорит о том, что, действительно, заданный интервал скоростей является малым.

Тогда долю молекул, относительные скорости которых лежат в заданном интервале скоростей, можно вычислить:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 1^2 \cdot e^{-1^2} \cdot \frac{5}{1{,}82 \cdot 10^3} = 0{,}0023.$$

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}0023$, или 0,23 %.

Задания 4 и 5.
Уравнение Менделеева — Клапейрона. Изопроцессы в газах. Графики процессов

Основные понятия и формулы

— Идеальные газы подчиняются уравнению состояния Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где P — давление газа; V — его объем; T — термодинамическая температура; m — масса газа; M — молярная масса газа; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная; отношение $\nu = m/M$ определяет число молей вещества.

— Согласно закону Дальтона давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, т. е. тех давлений, которые имел бы каждый из газов в отдельности, если бы он при данной температуре один заполнял весь объем.

— Основное уравнение молекулярно-кинетической теории для давления идеальных газов имеет вид

$$P = \frac{2}{3} n W_0 = nkT,$$

где n — концентрация молекул, т.е. число молекул в единице объема; W_0 –кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы, движущейся со средней скоростью; k — постоянная Больцмана, равная $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T — абсолютная температура.

— Газовые процессы, проводимые при неизменном одном из термодинамических параметров состояния системы и для постоянного количества газа, называют изопроцессами.

— Изотермический процесс — процесс, проходящий при постоянной температуре, при m = const. Уравнение изотермического процесса имеет вид

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \text{ или } PV = \text{const}.$$

— Изохорический процесс — процесс, проходящий при постоянном объеме, при m = const. Уравнение изохорического процесса имеет вид

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \text{ или } \frac{P}{T} = \text{const}.$$

— Изобарический процесс — процесс, проходящий при постоянном давлении, при m = const. Уравнение изобарического процесса имеет вид

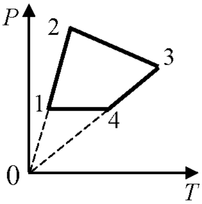
$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const}.$$

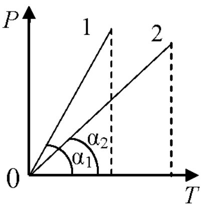
— Адиабатический процесс — процесс, происходящий без теплообмена с внешней средой. Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона):

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \text{ или } PV^{\gamma} = \text{const},$$

где показатель адиабаты $\gamma = c_p / c_V$.

Примеры решения задач





ЗАДАЧА 1. В сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный газ. Процесс изменения состояния газа приведен на рисунке. Какому участку графика соответствует процесс уменьшения объема?

Решение:

Изобразим графически изохорный процесс (V= const) для двух значений объема V_1 и V_2. Проанализируем, как величина объема, при котором проводится процесс, влияет на ход графика.

Запишем уравнение состояния идеального газа: $pV = \nu RT$, тогда давление газа можно выразить как функцию температуры

$$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu R}{V} T.$$

Отсюда видно, что угол наклона графика зависит от объема газа. Чем больший объем занимает газ, тем меньше угол наклона графика этой зависимости. Тангенс угла наклона прямой можно определить по формуле: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\nu R}{V}$, следовательно, т. к. $\mathrm{tg}\alpha_1 > \mathrm{tg}\alpha_2$, то $\alpha_1 > \alpha_2$.

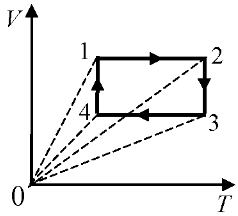
Проанализируем график, заданный в условии задачи. Участок 1–2 является графиком изохорического процесса, при котором увеличивается температура и давление; следующий процесс цикла 2–3 не является изопроцессом, давление при процессе уменьшается, а температура увеличивается. Третий процесс 3–4 — это изохорическое охлаждение газовой системы. И последний процесс 4–1 — изобарическое охлаждение до первоначальной температуры.

Из приведенного выше анализа хода двух графиков изохорических процессов можно сделать вывод, что участок графика 3–4 соответствует изохорическому процессу, проведенному при большем объеме, чем на процессе 1–2. Искомый участок в данном циклическом процессе, который протекает с увеличением объема,— это участок 2–3.

Ответ: объем увеличивается при процессе 2–3.

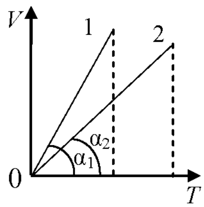
ЗАДАЧА 2. Идеальный газ совершает круговой процесс, как показано на рисунке. В какой точке давление газа максимальное?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

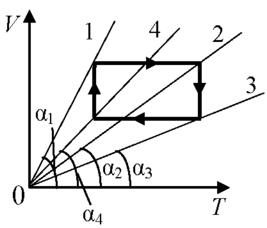


Решение:

Изобразим графически изобарный процесс (p = const) для двух значений давления P_1 и P_2. Запишем уравнение состояния идеального газа: $PV = \nu RT$, тогда давление газа можно выразить $P = \frac{\nu RT}{V}$. Из рисунка видно, что тангенс угла наклона прямой можно определить по формуле: $\text{tg}\alpha = \frac{V}{T}$, тогда



$P = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu R}{\text{tg}\alpha}$. Следовательно, т. к. $\alpha_1 > \alpha_2$ и $\text{tg}\alpha_1 > \text{tg}\alpha_2$, то $P_1 < P_2$.



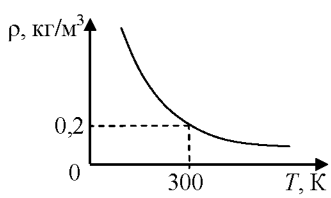
Аналогично, проведем изобары через точки 1, 2, 3, 4. Из рисунка видно, что углы $\alpha_1 > \alpha_4 > \alpha_2 > \alpha_3$, следовательно,

$$\text{tg}\alpha_1 > \text{tg}\alpha_4 > \text{tg}\alpha_2 > \text{tg}\alpha_3.$$

Тогда согласно формуле для давления получим, что $P_3 > P_2 > P_4 > P_1$.

Правильный ответ: 3 (P_3 — максимальное давление).

ЗАДАЧА 3. На рисунке изображен график зависимости плотности ρ водорода от абсолютной температуры T при изобарическом процессе. Молярная масса водорода M = 0,002 кг/моль. Пользуясь данными графика, определить давление P газа.



Решение:

Плотность газа определяется как отношение массы газа к объему, который он занимает, $\rho = \frac{m}{V}$. Давление газа можно выразить через уравнение Менделеева — Клапейрона как

$$P = \frac{mR}{VM}T = \rho\frac{RT}{M},$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

Подставив числовые значения плотности и температуры из графика, получим, что

$$P = 0{,}2 \cdot \frac{8{,}31 \cdot 300}{0{,}002} = 249 \text{ кПа}.$$

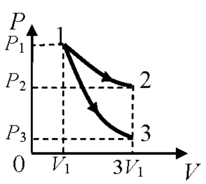
Правильный ответ: $P = 249$ кПа.

ЗАДАЧА 4. Два моля водорода расширяются из одного и того же состояния один раз изотермически, а второй раз — адиабатически. В обоих случаях объем газа возрастает в 3 раза. Нарисовать графики этих процессов и определить, во сколько раз конечное давление газа при изотермическом расширении больше, чем конечное давление газа при адиабатическом расширении.

Дано:
$\nu = 2$ моля
V_1
$V_2 = 3V_1$

Найти: $\frac{P_2}{P_3} = ?$

Решение:



Для сравнения процессов нарисуем графики описанных процессов в координатах P–V. По условию задачи в обоих процессах объем увеличился в три раза. Уравнение изотермического процесса имеет вид $PV = \text{const}$. График такой зависимости давления от объема представляет собой гиперболу. Уравнение адиабатического процесса задается уравнением Пуассона $PV^{\gamma} = \text{const}$, и графиком такой функции является степенная гипербола.

Приведем графики этих зависимостей в координатах P–V. График изотермического процесса — гипербола с показателем степени 1 (график 1–2), а графиком адиабатического процесса является степенная гипербола, показателем степени является коэффициент Пуассона γ (график 1–3).

Водород является двухатомным газом, поэтому молекула обладает пятью степенями свободы и коэффициент

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{i}{2}R + R}{\frac{i}{2}R} = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4\ .$$

Рассмотрим изотермический процесс (процесс 1–2). Уравнение изотермического процесса по закону Бойля — Мариотта для данной задачи имеет вид

$$P_1V_1 = P_2V_2 \text{ или } P_1V_1 = P_2 \cdot 3V_1, \text{ отсюда } P_2 = \frac{P_1}{3}.$$

Рассмотрим адиабатический процесс (процесс 1–3):

$$P_1V_1^\gamma = P_3V_3^\gamma.$$

В нашем случае $P_3V_3^\gamma = P_3\left(3V_1^\gamma\right)$. Для конечного давления на адиабатическом процессе получаем $P_3 = \frac{P_1}{3^\gamma}$. Тогда отношение давлений равно

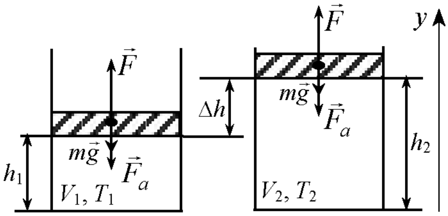
$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_1 \cdot 3^\gamma}{3P_1} = 3^{\gamma-1} = 3^{0,4} = 1{,}55.$$

Ответ: $\frac{P_2}{P_3} = 1{,}55.$

ЗАДАЧА 5. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 0{,}09$ моль находится в равновесии в вертикальном цилиндре под поршнем массой $m = 5$ кг и площадью $S = 25$ см^2. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа. В результате нагревания газа поршень поднялся на высоту $\Delta h = 4$ см. На сколько градусов увеличилась температура газа?

Дано:
$\nu = 0{,}09$ моль
$m = 5$ кг
$S = 25$ см^2
$p_0 = 100$ кПа
$\Delta h = 4$ см

Определить: $\Delta T = ?$



Решение:

На поршень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления газа $\vec{F}$ и сила давления атмосферы $\vec{F}_a$.

Так как в начальном и конечном состоянии поршень покоится, то по второму закону Ньютона $\vec{F}_a + m\vec{g} + \vec{F} = 0$. Спроецируем это выражение на вертикальную ось Оу:

$$F = P \cdot S = F_a + mg = P_0 \cdot S + mg .$$

Выразим давление газа как $P = P_0 + \frac{mg}{S}$. В газе происходит изобарический процесс, поэтому $P_1 = P_2 = P$. Запишем два уравнения Менделеева–Клапейрона для начального состояния газа: $PV_1 = \frac{m}{M}RT_1 = \nu RT_1$ и конечного состояния: $PV_2 = \frac{m}{M}RT_2 = \nu RT_2$.

Вычитая из одного уравнения другое, получим:

$$P(V_2 - V_1) = P \cdot S \cdot \Delta h = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R\Delta T .$$

Подставим в эту формулу выражение для давления газа $P = P_0 + \frac{mg}{S}$ и получим:

$$\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot S \cdot \Delta h = \nu R\Delta T .$$

Тогда изменение температуры будет равно

$$\Delta T = \frac{(P_0 S + mg) \cdot \Delta h}{\nu R} .$$

$$\Delta T = \frac{(10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10) \cdot 0{,}04}{0{,}09 \cdot 8{,}31} = 16 \text{ K}.$$

Правильный ответ: $\Delta T = 16$ K.

Задание 6. Число степеней свободы. Молярная, удельная теплоемкость. Энергия теплового движения молекул

Основные понятия и формулы

— Средняя кинетическая энергия теплового движения молекулы:

$$<W_к>=\frac{i}{2}kT,$$

где i — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы: $i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{колеб}$, где $i_{пост}$ — число степеней свободы поступательного движения, равное 3; $i_{вр}$ — число степеней свободы вращательного движения, которое может быть равным 0, 2 или 3 в зависимости от конфигурации молекулы; $i_{колеб}$ — число степеней свободы колебательного движения. Колебательное движение атомов в молекулах учитывается при достаточно высоких, порядка нескольких тысяч кельвинов, температурах. При невысоких температурах можно считать, что $i_{колеб} = 0$.

— Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимой для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$c_m = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{dQ}{dT},$$

где ν — количество молей, $\nu = \dfrac{m}{M}$.

— Молярная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов:

$$c_{mсм} = \frac{c_{m1}\cdot\nu_1 + c_{m2}\cdot\nu_2 + \ldots + c_{mn}\cdot\nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n}.$$

— Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимой для нагревания единицы массы вещества на один Кельвин:

$$c_{\text{уд}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}.$$

— Удельная теплоемкость смеси газов, состоящей из n компонентов:

$$c_{\text{уд см}} = \frac{c_{\text{уд}1} \cdot m_1 + c_{\text{уд}2} \cdot m_2 + \ldots + c_{\text{уд}n} \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

— Связь молярной (c_m) и удельной ($c_{\text{уд}}$) теплоемкости газа:

$$c_m = c_{\text{уд}} \cdot M,$$

где M — молярная масса газа.

— Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_{mV} = \frac{i}{2} R; \quad c_{mP} = \frac{(i+2)}{2} R,$$

где i — число степеней свободы; R — универсальная газовая постоянная.

— Показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)

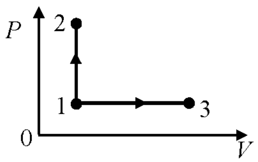
$$\gamma = \frac{c_{mP}}{c_{mV}} = \frac{i+2}{2}.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. Идеальный газ совершает два процесса, как показано на рисунке. Молярные теплоемкости молекулярного водорода при невысоких температурах в процессах 1–2 и 1–3 равны C_1 и C_2 соответственно. Определить отношение C_2/C_1.

Решение:

По условию газ находится при невысоких температурах, поэтому колебательное движение атомов в молекулах можно не учитывать,



$i_{\text{колеб}} = 0$. Молекулярный водород — это двухатомный газ, поэтому его молекула имеет пять степеней свободы, $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$.

Из рисунка следует, что процесс 1–2 является изохорическим процессом, а процесс

1–3 — изобарическим. Молярные теплоемкости двухатомного газа для этих процессов равны

$$C_1 = c_{mV} = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R,\ C_2 = c_{mP} = \frac{(i+2)}{2}R = \frac{5+2}{2}R = \frac{7}{2}R.$$

Вычислим искомое отношение:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: $C_2/C_1 = 1,4$

ЗАДАЧА 2. Найти среднюю кинетическую энергию одной молекулы углекислого газа CO_2 при температуре $t = 27$ °C и среднюю энергию вращательного движения этой молекулы при той же температуре.

Дано:
$T = 300$ K

$$M_{CO_2} = 44 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

Определить: 1. $< W_к > = ?$ 2. $< W_{вр} > = ?$

Решение:

Средняя кинетическая энергия молекулы определяется соотношением

$$< W_к > = \frac{i}{2}kT,$$

где i — число степеней свободы одной молекулы; k — постоянная Больцмана.

Число степеней свободы i трехатомной молекулы, какой является молекула углекислого газа, равно 6. Подставим значения величин в формулу для энергии:

$$< W_к > = \frac{6}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 1,242 \cdot 10^{-20}\ \text{Дж}.$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы определяется по формуле

$$<W_{\text{вр}}>=\frac{i_{\text{вр}}}{2}kT,$$

где $i_{\text{вр}}$ — число степеней свободы вращательного движения молекулы углекислого газа. Молекула CO_2 — трехатомная, поэтому $i_{\text{вр}}= 2$.

Подставим данные:

$$<W_{\text{вр}}>=\frac{2}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300=4{,}14\cdot 10^{-21}\text{ Дж.}$$

Ответ: $<W_{\kappa}>=1{,}242\cdot 10^{-20}$ Дж, $<W_{\text{вр}}>=4{,}14\cdot 10^{-21}$ Дж.

ЗАДАЧА 3. Определить кинетическую энергию вращательного движения всех молекул в 2 г водорода при температуре $T = 100$ K.

Дано:
$m = 2$ г $= 0{,}002$ кг
$M_{H_2} = 0{,}002$ кг/моль
$T = 100$ K

Определить: $W_{\text{вр}} = ?$

Решение:

Средняя кинетическая энергия одной молекулы равна $<W_{\kappa}>=\frac{i}{2}kT$, где i — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы, $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{колеб}}$. Молекула водорода H_2 имеет 2 вращательные степени свободы, следовательно, $<W_{\text{вр}}>=\frac{2}{2}kT=kT$.

В 2 г водорода содержится $N=\frac{m}{M}N_A$ молекул, где m — масса газа; M — молярная масса водорода; N_A — число Авогадро.

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул равна

$$W_{\text{вр}}=\frac{m}{M}N_AkT=\frac{m}{M}\cdot RT=\frac{0{,}002}{0{,}002}\cdot 8{,}31\cdot 100=831\text{ Дж.}$$

Ответ: $W_{\text{вр}} = 831$ Дж.

Задания 7 и 8. Внутренняя энергия. Работа при изопроцессах. Количество теплоты. Первое начало термодинамики для изопроцессов. Циклические процессы. КПД цикла

Основные понятия и формулы

— Внутренняя энергия идеального газа

$$U = NW_0 = \nu C_V T ,$$

где W_0 — средняя кинетическая энергия одной молекулы; N — число молекул газа; ν — количество вещества.

— Работа, совершаемая газом при изменении его объема, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV ,$$

где V_1 — начальный объем газа; V_2 — конечный объем газа.

— Работа газа при различных изопроцессах:

- при изобарическом процессе $P = \text{const}$ и работу можно вычислить так

$$A = P(V_2 - V_1);$$

- при изотермическом процессе, $T = \text{const}$,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT dV = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1};$$

- при адиабатическом процессе, протекающем без обмена теплом с внешней средой, работа газом совершается за счет внутренней энергии

$$A = -\Delta U = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right).$$

— Количество теплоты, подводимое к системе, в случае изохорического процесса равно

$$Q_V = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

— Количество теплоты, подводимое к системе, в случае изобарического процесса равно

$$Q_P = \frac{m}{M} C_P (T_2 - T_1).$$

— Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии для тепловых процессов):

- для бесконечно малого изменения состояния системы

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

- для конечного изменения состояния системы

$$Q = \Delta U + A.$$

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. При адиабатическом расширении одноатомного газа, взятого в количестве $\nu = 2$ моля, была совершена работа, равная 2493 Дж. Определите, на сколько градусов изменилась температура газа при этом процессе.

Дано:
$\nu = 2$ моль
$A = 2493$ Дж

Определить: $\Delta T = ?$

Решение:

При адиабатическом процессе работу газа проще находить, используя первый закон термодинамики. При адиабатическом процессе система не обменивается теплом с внешней средой, поэтому первый закон термодинамики для этого процесса будет иметь вид:

$$\delta Q = 0 \text{ и поэтому } 0 = A_{12} + \Delta U_{12},$$

$$\text{или } 0 = A_{12} = -\Delta U_{12} = -\frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Газ одноатомный, для него число степеней свободы равно $i = 3$. Из полученного выражения найдем разность температур и подставим численные значения:

$$(T_2 - T_1) = -\frac{2A_{12}}{\nu i R} = -\frac{2 \cdot 2493}{2 \cdot 3 \cdot 8{,}31} = -100 \text{ К},$$

где i — число степеней свободы.

Ответ: $\Delta T = -100$ К , знак «–» показывает, что температура газа в указанном процессе уменьшается на 100 К.

ЗАДАЧА 2. Один моль идеального одноатомного газа переводят из состояния 1 с температурой $T_1 = 300$ К в состояние 2 таким образом, что в течение всего процесса давление газа возрастает прямо пропорционально его объему. В ходе этого процесса газ получает количество теплоты $Q = 14958$ Дж. Во сколько раз уменьшается в результате этого процесса плотность газа?

Дано:
$\nu = 1$ моль
$i = 3$
$T_1 = 300$ К
$Q = 14958$ Дж
$P \sim V$

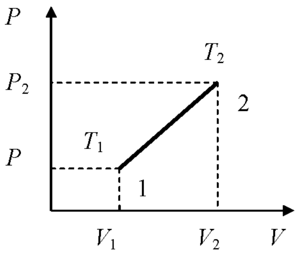
Определить: $n = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} = ?$

Решение:

Обозначим отношение плотностей $\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = n$. Изобразим процесс в координатах P–V. Обозначим давления и объемы газа в состояниях 1 и 2 соответственно как P_1, V_1 и P_2, V_2. Из первого закона термодинамики следует, что полученное газом количество теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа и на совершение им работы:

$$Q = \Delta U_{12} + A.$$

Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа равно



$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{3}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right),$$

где при преобразовании выражения использовано уравнение Менделеева — Клапейрона для состояний 1 и 2.

Работа, совершенная газом при процессе, численно равна площади под графиком процесса в координатах P–V. В нашем случае получаем

$$A_{12} = \frac{\left(P_1 + P_2\right)\cdot\left(V_2 - V_1\right)}{2}.$$

Так как при рассматриваемом процессе зависимость давления от объема линейная, то можно написать следующее соотношение: $\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2}$ или $\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_2}$ и выражение для работы получить в следующем виде:

$$A_{12} = \frac{\left(P_1 + P_2\right)\cdot\left(V_2 - V_1\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right).$$

С учетом полученных выражений для изменения внутренней энергии и работы газа запишем выражение для количества теплоты, полученной газом при этом процессе:

$$Q = \Delta U_{12} + A = \frac{3}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) + \frac{1}{2}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = 2\left(P_2V_2 - P_1V_1\right),$$

$$\text{или } Q_{12} = 2\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = 2P_1V_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right) = 2\nu T_1\left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1\right).$$

Отношение плотностей газа равно отношению его объемов $n = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_2}{V_1}$.

Подставив это соотношение в выражение для количества теплоты, получим из него искомую величину $n = \sqrt{1 + \frac{Q}{2\nu RT_1}}$. Подставляя в формулу численные данные и проверяя размерность, получаем, что $n = 2$.

Ответ: плотность газа уменьшится в 2 раза.

ЗАДАЧА 3. Двухатомный газ в количестве $\nu = 0{,}20$ моля при давлении $P_1 = 10^5$ Па занимает объем $V_1 = 10$ л. Сначала газ сжимают изобарически до объема $V_2 = 4{,}0$ л, после чего изотермически расширяют до первоначального объема V_1. Построить график заданного процесса в координатах $P–V$. Определить работу A, совершенную газом, количество теплоты, полученное системой, и изменение внутренней энергии при этом процессе.

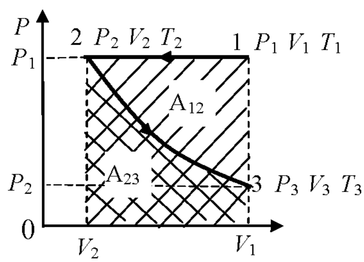
Дано:
$\nu = 0{,}2$ моль
$P_1 = 1 \cdot 10^5$ Па
$V_1 = 10$ л
$V_2 = 4{,}0$ л
$i = 5$

Определить: $A = ?$ $Q = ?$ $\Delta U = ?$

Решение:

По условию задачи с газовой системой проводится последовательно два процесса.

Первый процесс — изобарическое сжатие, при котором температура системы понижается, объем уменьшается, поэтому работа газа и изменение внутренней энергии отрицательны. Согласно первому началу термодинамики при этом процессе тепло от системы отводится, так как $\delta Q = dU + \delta A$.



Второй участок графика соответствует изотермическому расширению, при котором работа положительная, а внутренняя энергия не изменяется, так как температура остается постоянной. Первое начало термодинамики для изотермического процесса имеет вид $\delta Q = \delta A$.

Построим график заданного процесса. Работа газа на графике процесса в координатах $P–V$ равна площади, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и ординатами начального и конечного объема. Полная работа равна алгебраической сумме работ:

$$A = A_{12} + A_{23}.$$

Работа при изобарическом процессе равна $A_{12} = P_1 (V_2 - V_1)$. На графике эта площадь заштрихована косыми линиями, наклоненными вправо. При изотермическом процессе работа газа равна площади криволинейной фигуры, поэтому работа при таком процессе равна интегралу от элементарной работы в пределах от V_2 до V_3:

$$A_{12} = \int\limits_{V2}^{V3} PdV = \int\limits_{V2}^{V3} \frac{\nu RT_2}{V} dV = \nu RT_2 \int\limits_{V2}^{V3} \frac{dV}{V} = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}.$$

Если учесть, что по условию задачи $V_3 = V_1$ и из уравнения Менделеева — Клапейрона для второго состояния $\nu RT_2 = P_1V_2$, получаем, что

$$A_{12} = P_1V_2 \ln\frac{V_1}{V_2}.$$

На графике эта работа соответствует площади, заштрихованной косыми линиями, наклоненными в другую сторону.

Таким образом, полная работа газа равна:

$$A = P_1(V_2 - V_1) + P_1V_2 \ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Изменение внутренней энергии во всем процессе равно

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23}.$$

При изобарическом процессе $\Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, внутренняя энергия уменьшается, так как при изобарическом сжатии газ охлаждается.

Так как второй процесс протекает при постоянной температуре, то $\Delta U_{23} = 0$.

Суммарное изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U = \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Используя уравнение Менделеева — Клапейрона для второго состояния $\nu RT_2 = P_1V_2$ и для первого состояния $\nu RT_1 = P_1V_1$, получаем:

$$\Delta U = \frac{i}{2}P_1(V_2 - V_1).$$

Рассчитаем численные значения искомых величин:

$$A = 10^5(4-10)\cdot 10^{-3} + 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \ln\frac{10}{4} = -\ 600 + 400\ (0{,}92) = -\ 232\ \text{Дж},$$

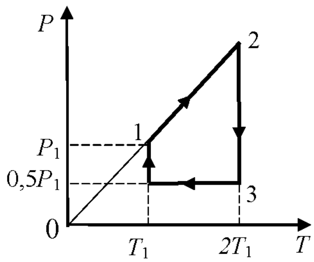
$$\Delta U = \frac{5}{2}10^5(10-4)\cdot 10^{-3} = 1500 \text{ Дж} = 1{,}5 \text{ кДж}.$$

Согласно первому закону термодинамики количество тепла, полученного системой, равно сумме изменения внутренней энергии системы и работы газа:

$$Q = \Delta U + A, \text{ или } Q = 1500 - 232 = 1268 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = -232$ Дж, $\Delta U = 1{,}5$ кДж, $Q = 1268$ Дж.

ЗАДАЧА 4. На графике изображен цикл с идеальным одноатомным газом неизменной массы в количестве $\nu = 2$ моля. Представьте график цикла в координатах P–V и определите количество теплоты, полученное газом за цикл, если параметры газа в состоянии 1 равны $T_1 = 300$ К, а давление $P_1 = 10^5$ Па. Определите КПД этого теплового цикла.



Дано:
$\nu = 2$ моля
$T_1 = 300$ К
$P_1 = 10^5$ Па

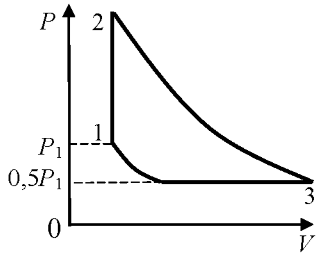
Определить: $\eta = ?$

Решение:

Проанализируем процессы, входящие в этот цикл. Он состоит из четырех процессов. Процесс 1–2 является изохорическим, следовательно, газ не совершает работы ($A_{12} = 0$). При этом температура газа увеличивается в два раза, следовательно, внутренняя энергия также возрастает. Таким образом, на этом процессе система получает тепло $Q_{12} = \Delta U_{12}$.

Второй процесс 2–3 является изотермическим расширением, при этом газ совершает положительную работу $A_{23} > 0$, но внутренняя энергия его не изменяется $\Delta U_{23} = 0$, т. к. процесс изотермический. На этом процессе система также получает тепло $Q_{23} = A_{23}$.

Третий процесс 3–4 представляет собой изобарическое охлаждение до температуры в два раза меньшей, чем в состоянии 3. Здесь внутренняя энергия уменьшается, т. к. $\Delta T_{34} = (T_4 - T_3) = (T_1 - 2T_1) = -T_1$. Работа



газа $A_{34} < 0$; поскольку газ сжимается, значит, на этом процессе система отдает тепло $Q_{34} = (\Delta U_{34} + A_{34}) < 0$.

Последний участок циклического процесса — изотермическое сжатие до первоначального объема и давления. При изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется $\Delta U_{41} = 0$, а объем уменьшается, следовательно, газ совершает отрицательную работу $A_{41} < 0$, поэтому система при этом процессе отдает тепло $Q_{41} = A_{41} < 0$.

Построим график этого процесса в координатах P–V и запишем уравнения процессов:

1–2 — изохорический процесс: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{2T_1}$;

2–3 — изотермический процесс: $P_2V_1 = 0{,}5P_1V_3$;

3–4 — изобарический процесс: $\frac{V_3}{2T_1} = \frac{V_2}{T_1}$ или $V_3 = 2V_2$;

4–1 — изотермическое сжатие: $P_1V_1 = 0{,}5P_1V_4$.

Выпишем параметры всех четырех состояний, учитывая все, что было сказано выше, и с учетом решения системы полученных уравнений:

состояние 1 — параметры P_1, V_1, T_1;
состояние 2 — параметры $2P_1$, V_1, $2T_1$;
состояние 3 — параметры $0{,}5P_1$, $4V_1$, $2T_1$;
состояние 4 — параметры $0{,}5\ P_1$, $2V_1$, T_1.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона можно найти значение объема газа в первом состоянии:

$$PV = \frac{m}{M}RT\text{, отсюда } V_1 = \frac{\nu RT_1}{P_1} = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot 300}{10^5} = 0{,}0499\ \text{м}^3.$$

Найдем количество теплоты, полученное газом за цикл. Мы уже установили, что система получает тепло при первых двух процессах:

$$Q_{\text{получ}} = Q_1 = \Delta U_{12} + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} + \nu R2T_1 \ln\frac{V_3}{V_2}.$$

Учитывая, что $V_3 = 4V_1$ и $\Delta T_{12} = T_1$, можно записать:

$$Q_{\text{получ}} = Q_1 = \frac{3}{2}\nu RT_1 + \nu R2T_1 \ln\frac{4V_1}{V_1} = \nu RT_1\left(1{,}5 + 2\ln 4\right) =$$
$$= 2\cdot 8{,}31\cdot 300\cdot 4{,}27 = 21{,}3 \text{ кДж}.$$

Вычислим КПД заданного цикла. По определению, коэффициент полезного действия тепловой машины определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_1},$$

где $A_{\text{цикл}}$ – работа, совершенная за цикл.

Количество теплоты, полученное системой за цикл, равно $Q_1 = 21{,}3$ кДж.

Работа, совершенная за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной графиком:

$$A_{\text{цикл}} = A_{23} + A_{34} + A_{41} = \nu R2T_1 \ln\frac{V_3}{V_2} + 0{,}5P_1\left(V_4 - V_3\right) + \nu RT_1 \ln\frac{V_1}{V_4}.$$

Подставим численные значения и получим, что

$$A_{\text{цикл}} = \nu RT_1 \ln 2 - P_1V_1 = 2\cdot 8{,}31\cdot 300\cdot 0{,}69 - 10^5\cdot 4{,}97\cdot 10^{-3} = 2{,}943 \text{ кДж}.$$

Вычислим КПД цикла:

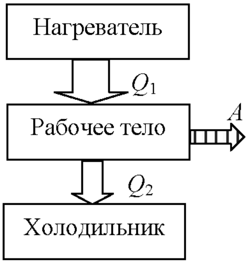
$$\eta = \frac{A_{\text{цикл}}}{Q_1} = \frac{2943}{21300} = 0{,}138.$$

Ответ: $\eta = 13{,}8\,\%$.

Задание 9. Тепловые машины. Идеальная машина Карно

Основные понятия и формулы

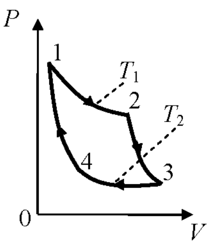
— Тепловая машина, блок-схема которой приведена на рисунке, преобразует внутреннюю энергию топлива в механическую работу. Здесь Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим те-



лом (газом) от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику (охладителю); A — работа, совершаемая рабочим телом за цикл, величина которой определяется как разность количества теплоты Q_1 и Q_2: $A = Q_1 - Q_2$.

— Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла в общем случае

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}.$$



— Идеальная тепловая машина (или машина Карно), работающая на идеальном газе, имеет цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).

На участке 1–2 происходит изотермическое расширение при температуре T_1, при котором газ получает теплоту Q_1 от нагревателя. На участке 2–3 происходит адиабатное расширение, при котором температура падает до T_2. Участок 3–4, на котором холодильнику отводится количество теплоты Q_2, соответствует изотермическому сжатию при температуре T_2. Наконец, на участке 4–1 происходит адиабатное сжатие, при котором температура повышается до исходной T_1.

— КПД идеальной тепловой машины (цикла Карно)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура охладителя. КПД идеальной тепловой машины является максимально возможным для заданных температур нагревателя и холодильника. Любой другой цикл, отличающийся от цикла Карно, имеет меньшее КПД, чем КПД машины Карно, является максимально возможным и не зависит от конкретного вида рабочего тела.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. Первоначально КПД цикла Карно равен $\eta = 40\,\%$. Определить КПД η^* после того, как температуру нагревателя увеличили на 20 %, а температуру охладителя понизили на 20 %.

Дано:
$\eta = 40\,\%$
$T_1^* = 1{,}2T_1$
$T_2^* = 0{,}8T_2$

Определить: $\eta^* = ?$

Решение:
Коэффициент полезного действия обратимого цикла Карно равен:
$\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$ или $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$ (в долях).

Первоначальный КПД равен $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$, следовательно, $0{,}4 = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$, отсюда $\dfrac{T_2}{T_1} = 0{,}6$. Во втором случае температуры нагревателя и охладителя стали равными $T_1^* = 1{,}2T_1$ и $T_2^* = 0{,}8T_2$. Тогда КПД η^* равен:

$$\eta^* = \frac{T_1^* - T_2^*}{T_1^*} = 1 - \frac{T_2^*}{T_1^*} = 1 - \frac{0{,}8T_2}{1{,}2T_1} = 1 - \frac{0{,}8}{1{,}2} \cdot \frac{T_2}{T_1} =$$
$$= 1 - \frac{0{,}8}{1{,}2} \cdot 0{,}6 = 0{,}6 \text{ или } 60\,\%.$$

Ответ: $\eta^* = 60\,\%$.

ЗАДАЧА 2. В идеальной тепловой машине из каждого одного джоуля теплоты, получаемой от нагревателя, 0,75 Дж отдается холодильнику. Если температура холодильника 27 °C, то чему равна температура нагревателя (в °C)?

Дано:
$Q_1 = 1$ Дж
$Q_2 = 0,75$ Дж
$t_2 = 27$ °C

Определить: $t_1 = ?$

Решение:

Коэффициент полезного действия тепловой машины определяется соотношением

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное от нагревателя; Q_2 — количество теплоты, отданное холодильнику.

Для идеальной тепловой машины $\eta_{\text{ид}} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$, где T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника соответственно. Приравнивая правые части этих выражений, получаем, что $\dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$.

Отсюда $T_1 = T_2 \cdot \dfrac{Q_1}{Q_2} = 300 \cdot \dfrac{1}{0,75} = 400\,\text{K} = 127\,°\text{C}$.

Ответ: $t_1 = 127\,°\text{C}$.

Задание 10. Энтропия. Изменения энтропии системы

Основные понятия и формулы

— Энтропия — скалярная физическая величина, характеризующая беспорядок в распределении частиц макроскопической системы по координатам и импульсам, определяется по формуле Больцмана

$$S = k \cdot \ln W,$$

где S — энтропия системы; W — термодинамическая вероятность состояния системы; k — постоянная Больцмана.

— Изменение энтропии (интеграл приведенных теплот):

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} dS = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии не зависит от пути перехода системы и промежуточных состояний, а однозначно определяется только начальным и конечным состояниями системы. Данная формула справедлива не только для газов, но и для жидкостей и твердых тел во всех случаях, когда теплоемкость не зависит от температуры и может быть вынесена за знак интеграла.

Примеры решения задач

ЗАДАЧА 1. Расчет изменения энтропии в конденсированных системах (твердое, жидкое) для тепловых процессов и процессов изменения агрегатного состояния веществ.

Кусок льда массой $m = 200$ г, взятый при температуре $t_1 = -20$ °C, был нагрет до температуры $t_2 = 0$ °C и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t_3 = +20$ °C. Найти изменение энтропии ΔS в ходе указанных процессов.

Дано:
$m = 200$ г $= 0{,}2$ кг
$t_1 = -20$ °C, $t_2 = 0$ °C
$t_3 = +20$ °C, $c_1 = 2100$ Дж/(кг·K)
$\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·K)

Определить: $\Delta S = ?$

Решение:
В данной термодинамической системе происходят три процесса:
1) нагревание льда от начальной температуры t_1 до температуры плавления $t_2 = 0$ °C;
2) плавление льда при температуре плавления $t_2 = 0$ °C;
3) нагревание полученной воды при $t_2 = 0$ °C до температуры $t_3 = +20$ °C.

Общее изменение энтропии ΔS равно изменению энтропии на каждом этапе: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$. Как известно, изменение энтропии рассчитывается с помощью интеграла приведенных теплот $\Delta S = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}$.

Рассчитаем изменение энтропии в каждом процессе

1) При бесконечно малом изменении температуры dT нагреваемого льда затрачивается количество теплоты $\delta Q = c_1 m dT$, где m — масса льда; c_1 — удельная теплоемкость льда. Подставив выражение δQ в интеграл приведенных теплот, можно получить:

$$\Delta S_1 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{(T_1)}^{(T_2)} \frac{c_1 m dT}{T}.$$

Вынесем за знак интеграла постоянные величины и проведем интегрирование, тогда получим

$$\Delta S_1 = c_1 m \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 2100 \cdot 0,2 \cdot \ln\left(\frac{273}{253}\right) = 32 \text{ Дж/К}.$$

При вычислениях необходимо помнить, что температуру следует подставлять в Кельвинах.

2) При вычислении изменения энтропии во время плавления льда необходимо учесть, что температура плавления остается неизменной и как постоянная величина выносится за знак интеграла:

$$\Delta S_2 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int \delta Q = \frac{1}{T_2} \cdot Q,$$

где Q — количество теплоты, переданное при превращении льда в воду той же температуры.

Подставив выражение количества теплоты $Q = \lambda m$, где λ — удельная теплота плавления льда, в формулу расчета изменения энтропии и произведя вычисления, получаем

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2} \cdot Q = \frac{1}{T_2} \cdot \lambda m = \frac{1}{273} \cdot 3,3 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = 241,7 \text{ Дж/К}.$$

3) Расчет изменения энтропии при нагревании полученной при плавлении льда воды производится аналогично рассмотренному в п. 1:

$$\Delta S_3 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{(T_2)}^{(T_3)} \frac{c_2 m dT}{T} = c_2 m \cdot \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 4200 \cdot 0,2 \cdot \ln\left(\frac{293}{273}\right) = 59,4 \text{ Дж/К},$$

где c_2 — удельная теплоемкость воды.

Полное изменение энтропии:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 32 + 241{,}7 + 59{,}4 = 333{,}1 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 333{,}1$ Дж/К.

ЗАДАЧА 2. Расчет изменения энтропии для идеального газа

Определить изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении кислорода массой $m = 10$ г от объема $V_1 = 25$ л до объема $V_2 = 100$ л.

Дано:

$m = 10$ г $= 0{,}01$ кг

$V_1 = 25$ л $= 25 \cdot 10^{-3}$ м^3

$V_2 = 100$ л $= 100 \cdot 10^{-3}$ м^3

$M = 0{,}032$ кг/моль

Определить: $\Delta S = ?$

Решение:

Так как процесс изотермический, то в общем выражении для изменения энтропии $\Delta S = \int\limits_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}$ температуру как константу можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta S = \frac{1}{T}\int\limits_{(1)}^{(2)} \delta Q = \frac{Q}{T}.$$

Количество теплоты Q, полученное газом, найдем по первому закону термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Для изотермического процесса $\Delta U = 0$.

Следовательно, $Q = A$.

Работа газа для изотермического процесса рассчитывается по следующему соотношению:

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} P dV = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M}\frac{RT}{V} dV = \frac{m}{M} RT \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

С учетом полученного выражения для работы газа при изотермическом процессе изменение энтропии равно:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \cdot \frac{m}{M} RT \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{M} R \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{0{,}01}{0{,}032} \cdot 8{,}31 \cdot \ln\left(\frac{0{,}100}{0{,}025}\right) = 3{,}6 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 3{,}6$ Дж/К.

ЗАДАЧА 3. Водород массой m = 6 г изобарически расширяется от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$. Найти изменение энтропии ΔS при расширении.

Дано:
m = 6 г = 0,006 кг
$V_2 = 2V_1$
M = 0,002 кг/моль

Определить: ΔS =?

Решение:

Водород H_2 — двухатомный газ, поэтому число степеней свободы равно $i = 5$.

Изменение энтропии рассчитывается с помощью интеграла приведенных теплот:

$$\Delta S = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}.$$

Количество теплоты, подведенное к системе при изобарическом процессе, найдем по первому закону термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT + pdV = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT + \frac{m}{M}RdT =$$
$$= \frac{i+2}{2}\frac{m}{M}RdT.$$

С учетом полученного выражения изменение энтропии равно:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T}\frac{(i+2)}{2}\frac{m}{M}RdT = \frac{(i+2)}{2}\cdot\frac{m}{M}R\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} =$$
$$= \frac{(i+2)}{2}\frac{m}{M}R\cdot\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

По условию процесс является изобарическим, поэтому можно воспользоваться законом Гей-Люссака и выразить отношение $\frac{T_2}{T_1}$ через известное соотношение V_1 и V_2:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \text{ отсюда } \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2V_1}{V_1} = 2.$$

С учетом полученного соотношения рассчитаем изменение энтропии:

$$\Delta S = \frac{(i+2)}{2}\frac{m}{M}R\cdot\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{(i+2)}{2}\frac{m}{M}R\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) =$$

$$= \frac{(5+2)}{2}\cdot\frac{0{,}006}{0{,}032}\cdot 8{,}31\cdot\ln 2 = 61 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 61$ Дж/К.

Оглавление

Учебное издание

Звездина Наталья Александровна
Пушкарева Надежда Борисовна
Сакун Галина Васильевна

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
ТЕРМОДИНАМИКА**

Редактор Н. П. Кубыщенко
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 09.02.2015. Формат $60 \times 90\ ^{1}/_{16}$.
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 2,0. Усл. печ. л. 2,75. Тираж 100 экз.
Заказ № 3.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru